به نام پروردگار مهربان

مهروماه

آزمونیوم

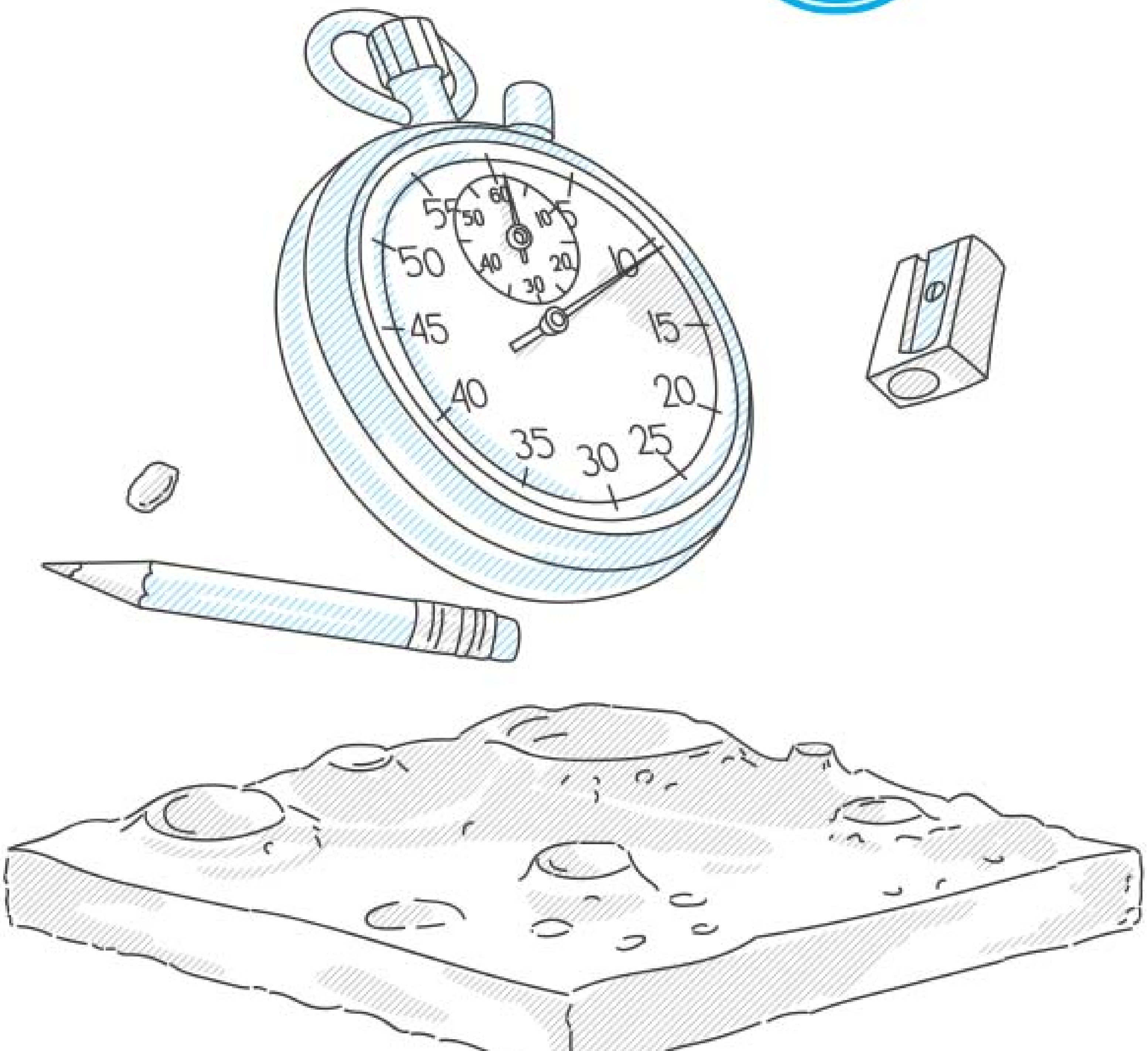
ریاضیات پایه و حسابان

پلاس PLUS+

آزمون‌هایی برای ۱۰۰٪

با آزمون‌هایی به سختی کنکور اخیر

• عباس اشرفی • محمدرضا ابراهیمی



مقدمه

دانش‌آموزان بعد از مطالعه و یادگیری درس و حل تست‌های کتاب‌های کمک‌آموزشی، به دنبال منبعی هستند تا به کمک آن بتوانند:

۱ میزان یادگیری و آمادگی خود را در مباحث موردنظر بسنجند.

۲ همهٔ مباحث را با تست‌های هدفمند و استاندارد، مرور و جمع‌بندی کنند.

۳ قبل از شرکت در آزمون‌های آزمایشی (قلم‌چی، گزینهٔ ۲ و...) آزمونی شبیه به آن را حل کنند تا جمع‌بندی مناسبی از وضعیت یادگیری خود در پایان هر مبحث داشته باشند.

۴ مجموعه‌ای از تست‌های شبیه‌سازی‌شده از کنکورهای سراسری سال‌های اخیر را در زمان‌بندی مشخص حل کنند تا هم اشتباهات محاسباتی خود را کاهش دهند و هم تمرین کنند که چگونه در جلسهٔ آزمون، زمان خود را مدیریت کنند.

بهترین پیشنهاد به آن‌ها حل آزمون‌های مبحثی و جامع، در سطح استاندارد کنکورهای سراسری سال‌های اخیر است.

کتاب آزمونیوم حسابان شامل چهار بخش کلی است:

۱ آزمون‌های مبحثی ۲ آزمون‌های جامع ۳ پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴ درس‌نامه

بخش ۱: آزمون‌های مبحثی

در این بخش با توجه به حجم، اهمیت و نحوهٔ بودجه‌بندی هر فصل در کنکورهای سراسری سال‌های اخیر، تعدادی آزمون مبحثی طرح شده است. هر مبحث شامل ۱۰ سؤال تألیفی استاندارد شبیه‌سازی‌شده از آزمون‌های آزمایشی مؤسسات معتبر و کنکورهای سراسری است.
با توجه به اهمیت هر فصل، یک یا دو آزمون جمع‌بندی از کل فصل که شامل تست‌های مهم کنکورهای سراسری سال‌های اخیر است، آمده است.

حل این آزمون‌ها با توجه به زمان‌بندی مشخص‌شده، می‌تواند محک مناسبی قبل از آزمون‌های آزمایشی باشد.

طراحی و چیدمان تست‌ها در آزمون‌های مبحثی به نحوی بوده که همهٔ سؤالات مهم هر مبحث را شامل شود.

بخش ۲: آزمون‌های جامع

این بخش شامل ۵ آزمون جامع استاندارد از کل ریاضی پایه و حسابان کنکور است. این آزمون‌ها نیز برای شرکت در آزمون‌های جامعی که مؤسسات مختلف برگزار می‌کنند و یا در دوران جمع‌بندی قبل از کنکور سراسری می‌توانند بسیار مفید باشند.
این آزمون‌ها نیز در واقع، آزمون‌های شبیه‌سازی‌شده از کنکورهای سراسری چند سال اخیر هستند. (کنکورهای سراسری سال های اخیر در درس ریاضیات کمی دشوار شده‌اند.)

بخش ۳: پاسخ‌نامهٔ تشریحی

و اما پاسخ‌نامه...

در این بخش، پاسخ تشریحی همهٔ آزمون‌ها را مشاهده خواهید کرد. در پاسخ تست‌ها سعی کردیم هر جایی که نیاز بوده نکات مهم را با **نکته سمی** و ایده‌های حل سؤال را با **ایده** یادآوری کنیم.

در بسیاری از تست‌ها هم اشتباهات متداول دانش‌آموزان را با **تله** بررسی کردیم. مطالعهٔ دقیق این قسمت‌ها می‌تواند تا حد زیادی اشتباهات متداول در حل تست‌ها را کاهش دهد.

در قسمت انتهایی پاسخ هر تست، شناسنامهٔ مربوط به آن سؤال آمده است که به شناسایی نقاط قوت و ضعف در هر ریزمبحث کمک شایانی می‌کند. همچنین همهٔ سؤالات در سه سطح ۱- کمی ساده‌تر ( ) ۲- کاملاً استاندارد ( ) ۳. کمی سخت‌تر ( ) سطح‌بندی شده‌اند.

بخش ۴: درس‌نامه

در ایـن بخـش، نـکات مهـم و کامـلاً کاربردی هر فصل را همراه با مثال‌های سـاده و روان توضیـح داده‌ایم. این درس‌نامـه می‌تواند منبع مفیدی برای دوران جمع‌بندی و مرور مباحث باشد.

سپاس و قدردانی

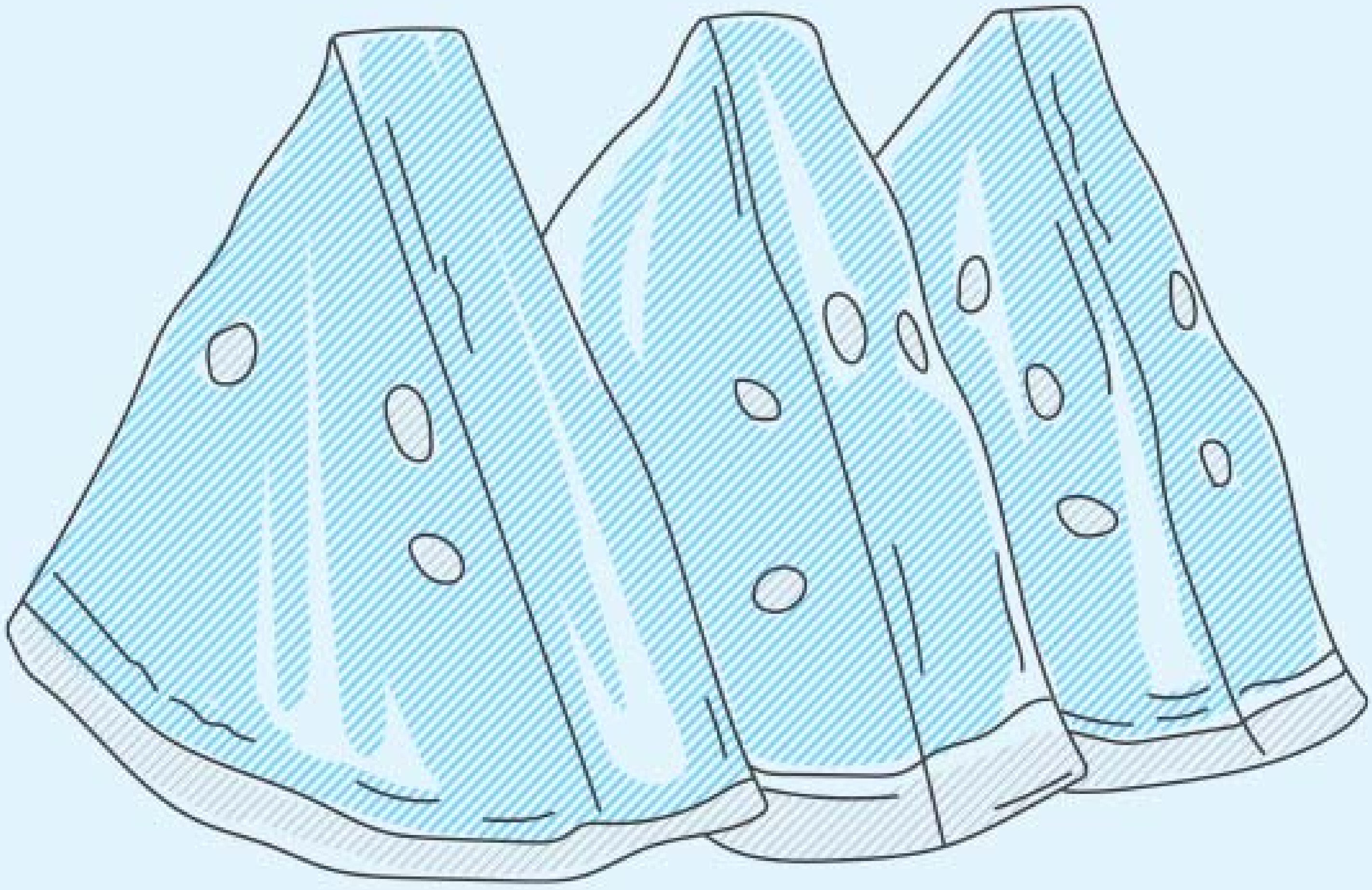
- جناب آقای احمد اختیاری، مدیر محترم انتشارات، که همواره حامی و پشتیبان ما در نوشتن این کتاب بوده‌اند.
- جناب آقای محمدحسین انوشه، مدیر محترم تألیف، به خاطر همه‌چیز؛ اعتماد، حمایت‌ها و دل‌گرمی‌هایشان.
- سـرکار خانـم ملکی، مدیـر واحـد ویراسـتاری و خانم‌هـا غنی‌فرد و رسـولی، مسـئولان ویراسـتاری کتاب کـه در همهٔ مراحـل آماده‌سـازی کتاب شبانه‌روزی تلاش کردند.
- آقایـان مهـدی حصـاری، مهدی مرادی، امیرپاشـا افسـری، محمدمهدی نیک‌اختر و دو معلم جـوان، آقایان محمد و مهدی مسـعودی که برای ویراستاری علمی و فنی این کتاب زحمات فراوانی کشیدند.
- سـرکار خانـم مریـم تاجـداری، مدیـر واحـد تولیـد، خانم‌ها پریسـا حسـینی و رویا طبسـی، صفحه‌آراهای کتـاب و خانـم مریم صابری‌برون، رسـام شکل‌های کتاب و نیز خانم ربابه موسوی‌خواه که زحمت حروف‌چینی کتاب را برعهده داشتند.
- اساتید بزرگوار آقایان سید بهروز سجادی و مهدی احمدی که نظرات علمی و فنی ارزشمند خود را از ما دریغ نکردند.
- دوسـتان عزیزم آقایان پویان پیرایی، سـید آرمان گیوه‌چی، سـروش اخوان‌شـریف، نیما نوری وره‌نو، علیرضا قرچلویی و شـهاب کثیری‌ها که در مرحلهٔ نهایی ویرایش و علمی‌خوانی این کتاب نقش بسزایی داشتند.

عباس اشرفی، محمدرضا ابراهیمی

فهرست

بخش ۱: آزمون‌های مبحثی ۷

بخش ۱



آزمون‌های مبحثی

در ایـن بخـش فصـل به فصل پیش رفته‌ایم و برای هر فصل با توجه به حجم مطالب و اهمیت آن در کنکور سراسری و آزمون‌های آزمایشی، تعدادی آزمون مبحثی قرار دادیم.
در انتهای هر فصل نیز یک یا دو آزمون جمع‌بندی از کل فصل وجود دارد که شـامل تسـت‌های اهمیت‌دار کنکورهای سراسری سال‌های اخیر است.
پیشنهاد می‌کنم قبل از حل هر آزمون حتماً درس‌نامهٔ آن آزمون را از بخش ۴ مطالعه کنید.
بریم سراغ آزمون‌ها ...

۹. معادلهٔ $(m^2+2m+3)\sqrt[3]{x^8}+4\sqrt[3]{x^4}-9=0$ به ازای هر مقدار دلخواه m، چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

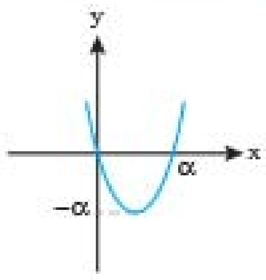
۱۰. اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $8x^2-4\sqrt{2}x+k=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ است؟

۱) $x^2-4x+1=0$ ۲) $x^2+4x-1=0$ ۳) $x^2+4x+1=0$ ۴) $x^2-4x-1=0$

آزمون ۱۲ سهمی و تابع درجه ۲

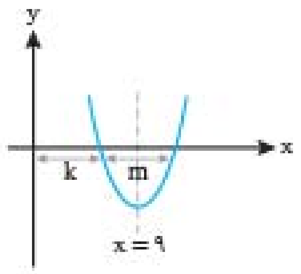
کتاب	فصل	صفحه کتاب	تعداد	زمان
ریاضی۱ حسابان۱	۴ ۱	۷۸ تا ۸۲ ۱۰ تا ۱۶	۱۰ تست	۱۶ دقیقه

۱. شکل مقابل نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ است. b کدام است؟



۱) ۲
۲) -2
۳) ۴
۴) -4

۲. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است. اگر $x=9$ معادلهٔ محور تقارن سهمی و $k=m$ باشد، مجموع مجذور ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ کدام است؟ (m فاصلهٔ بین دو ریشه است.)



۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰
۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۳. سهمی $f(x)$، خط $y=1$ را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. اگر $f(x)$ تابع ثابت g را در دو نقطه با طول‌های -1 و ۳ قطع کند و $f(0)=-2$ باشد، مقدار $g(1402)$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -7 ۳) -9 ۴) -11

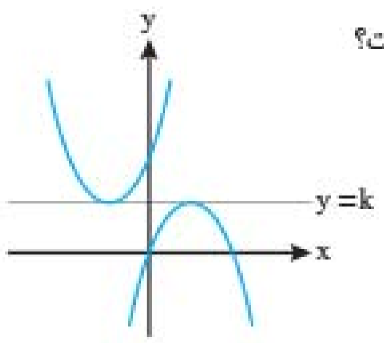
۴. خط گذرنده از نقطهٔ (a, b) که در آن a بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{2^{\cos^2 x}}{2}-1$ و b کمترین مقدار $f(x)$ است، سهمی $y=x^2+x-\frac{5}{2}$ را در دو نقطه با طول‌های α و β قطع می‌کند، $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) -2 ۴) -4

۵. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(1-m)x^2+x+m-2$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

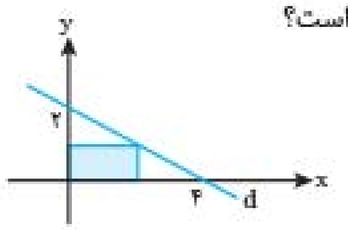
۱) $m>2$ ۲) $m<2$ ۳) $1<m<2$ ۴) $m<1$

۶. در شکل روبه‌رو خط $y=k$ و نمودار سهمی‌های $y=-x^2+2ax$ و $y=ax^2+2ax+2$ رسم شده‌اند. حاصل $a+k$ کدام است؟



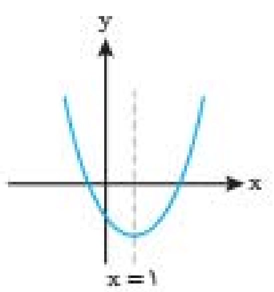
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷. مستطیلی بین خط d و دو محور مختصات، مطابق شکل مقابل محصور شده است. بیشترین مقدار مساحت این مستطیل کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۱

۸. شکل مقابل نمودار سهمی $f(x)=x^2+ax+a$ است. کدام معادله جواب‌هایش از دو برابر ریشه‌های $f(x)$ یک واحد بیشتر است؟



۱) $x^2-2x-11=0$
۲) $x^2+2x-11=0$
۳) $x^2-6x-3=0$
۴) $x^2+6x-3=0$

۹. در یک سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$، می‌دانیم $4a+2b+c<0$ و $\Delta<0$ است. علامت‌های a و c چگونه است؟

۱) $c>0, a>0$ ۲) $c<0, a<0$ ۳) $c>0, a<0$ ۴) $c<0, a>0$

۱۰. دو سهمی $y=ax^2-6x+c$ و $y=x^2-3x-1$ یکدیگر را در دو نقطه روی محور xها قطع می‌کنند. حاصل $a+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون ۱۷ جمع‌بندی معادلات و نامعادلات

کتاب	فصل	صفحه کتاب	تعداد	زمان
ریاضی۱ حسابان۱	۴ ۱	۸۳ تا ۹۳ ۱۷ تا ۲۲	۱۰ تست	۱۶ دقیقه

۱. نمودار تابع $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=0$ و $y=-2$ واقع می‌شود؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۲. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $2y=x^2$ و $x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$ از مبدأ مختصات کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$

۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\dfrac{45}{4}=\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{x^2}$ چه‌قدر از مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$ کمتر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴. تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۵. فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهٔ $\dfrac{((m^2-1)x^2-4mx+4)(2x-3)}{x-3\sqrt{x}+2}\geq 0$ فقط یک بازه باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -1 ۲) $\dfrac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\dfrac{7}{3}$

۶. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|kx-1|\geq|x-k|$، شامل فقط ۳ مقدار صحیح برای x باشد، محدودهٔ قابل قبول برای k شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷. در بازهٔ (a,b) نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (کنکور ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\dfrac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\dfrac{5}{4}$

۸. نسبت طول به عرض یک مستطیل ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۲)

۱) $0/3+\sqrt{5}$ ۲) $0/2(1+\sqrt{5})$ ۳) $0/6+0/2\sqrt{5}$ ۴) $0/4(1+\sqrt{5})$

۹. پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتری را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است، اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر بر ساعت است؟ (کنکور ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

۱۰. جدول تعیین علامت عبارت $A=(a-2)x^2+bx+1$ به‌صورت روبه‌رو است. ab کدام است؟

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
A		+	۰	−	

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

آزمون ۱۸ تابع قدرمطلق و ویژگی‌های آن

کتاب	فصل	صفحه کتاب	تعداد	زمان
حسابان۱	۱	۲۳ تا ۲۸	۱۰ تست	۱۶ دقیقه

۱. اگر $|3x-1|=|x-2|+|2x+1|$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2},2]$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $[-\frac{1}{2},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$

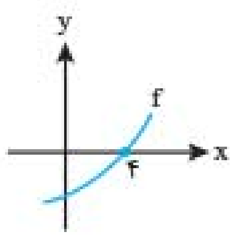
۲. نمودار تابع $y=|x-2|+|x-1|+|x|$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول و چهارم ۲) اول و دوم ۳) سوم و چهارم ۴) دوم و سوم

۳. نمودار تابع $f(x)=|x-1|+|x-2|+k$ فقط از ناحیهٔ سـوم عبور نمی‌کند. اگر مساحت ناحیهٔ محصورشده بین نمودار $f(x)$ و محور xها حداکثر مقدار ممکن باشد، حداقل مقدار $f(x)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -1 ۴) -4

۴. شکل مقابل نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. معادلهٔ $|x^2-\dfrac{f(x)}{|f(x)|}|=8$ چند ریشه دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷. f یک تابع خطی است به‌طوری که $(f+f^{-1})(x)=\frac{5}{2}x+1$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^2)+f^{-1}(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

۸. اگر چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۹. عبارت $x^{24}+1$ بر کدام عبارت همواره بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{12}+1$ ۲) x^3+1 ۳) x^6+1 ۴) x^8+1

۱۰. چندجمله‌ای $p(x)=x^{3n+1}+2x^{3n}+x^6+3x^5+16a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش‌پذیر است. برای $n=1$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر x^2+2x-3 کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱) $-15x+24$ ۲) $-15x+14$ ۳) $-5x+34$ ۴) $-5x+44$

آزمون

۲۸ جمع‌بندی تابع (۱)

کتاب	فصل	صفحه کتاب	تعداد	زمان
ریاضی ۱ حسابان ۱ حسابان ۲	۵ ۲ ۱	۹۵ تا ۱۱۷ ۳۸ تا ۷۰ ۱ تا ۲۲	۱۰ تست	۱۶ دقیقه

۱. حداقل چند عضو از مجموعهٔ $f=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ x=\frac{72}{y^2-1}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟ (کنکور ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲. کدام‌یک از توابع زیر با تابع $y=\log\frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (کنکور ۹۷)

۱) $\log(x-2)-\log x$ ۲) $\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$ ۳) $\frac{1}{2}\log(\frac{x-2}{x})^2$ ۴) $2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

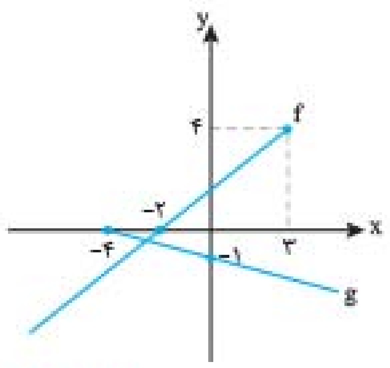
۳. توابع $f(x)=\log(2x-5)$ و $g(x)=x+\sqrt{2x-4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y=(g^{-1}of^{-1})(x)$ محور yها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱) $4-\sqrt{2}$ ۲) $4-\sqrt{3}$ ۳) $4+\sqrt{2}$ ۴) $4+\sqrt{3}$

۴. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & ; & x<-1\\ x & ; & -1\le x\le 1\\ 1 & ; & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$، ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۵. نمودار توابع خطی f و g در شکل مقابل رسم شده است. برد $f\times g$ کدام است؟



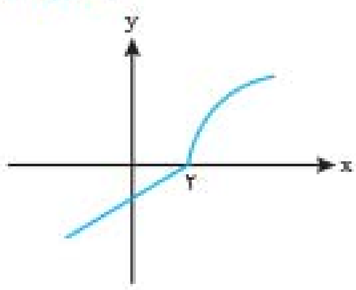
۱) $[-7,0]$

۲) $[-7,\frac{1}{5}]$

۳) $[-5,0]$

۴) $[-5,\frac{1}{5}]$

۶. اگر $f(x)=|\frac{1}{2}x-1|$ و شکل زیر تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+2)))=0$ چند ریشه دارد؟ (کنکور ۱۴۰۱)



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۷. اگر $f(x)=x-\frac{2}{x}$ با دامنهٔ $(-\infty,0)$ باشد، جواب معادلهٔ $f^{-1}(\frac{x-6}{2})=2f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۸. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{1}{2x}$ با دامنهٔ $(0,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (کنکور ۹۹)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

۹. فاصلهٔ نقطه تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود از مبدأ مختصات کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

آزمون ۳۴ — شناخت دایره و نسبت‌های مثلثاتی- رادیان

کتاب	فصل	صفحه کتاب	تعداد	زمان
ریاضی۱	۲	۲۸ تا ۴۱	۱۰ تست	۱۶ دقیقه
حسابان۱	۴	۹۲ تا ۹۷		

۱. چه تعداد از موارد زیر درست است؟

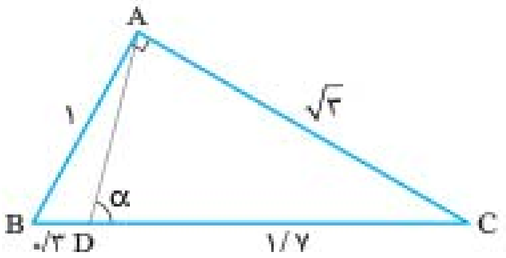
الف) $|\cos ۳|<|\cos ۴|$

ب) اگر $-\frac{\pi}{۴}<\alpha<-\frac{\pi}{۶}$ باشد، آن‌گاه $[\cos\alpha]<[\sin\alpha]$.

پ) هر ۱ درجه تقریباً ۰/۰۱۷ رادیان است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. در شکل مقابل، $\tan\alpha$ کدام است؟



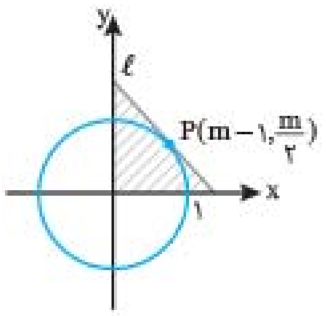
۱) $۵\cos ۳۰^\circ$

۲) $۵\sin ۳۰^\circ$

۳) $\frac{۵}{۲}\cos ۳۰^\circ$

۴) $\frac{۵}{۲}\sin ۳۰^\circ$

۳. در شکل روبه‌رو، خط ℓ بر دایرهٔ مثلثاتی در نقطهٔ P مماس است. مساحت مثلث هاشورخورده چه‌قدر است؟

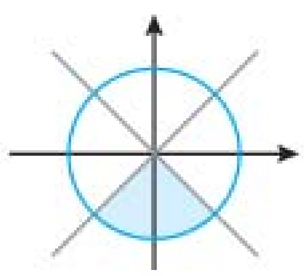


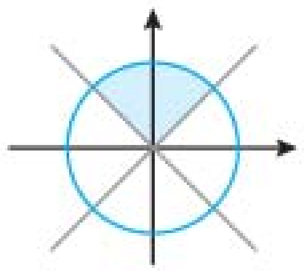
۱) $\frac{۲۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

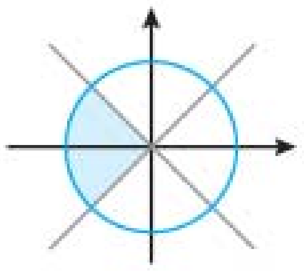
۴. اگر $-۱۰^\circ<x<۱۵^\circ$ و $\cos ۳x=\frac{m+۱}{۲}$ باشد، m شامل چند عدد صحیح است؟

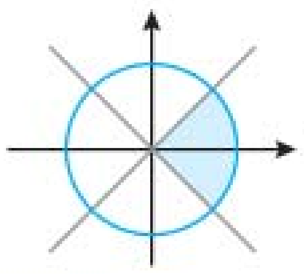
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵. کدام شکل محدودهٔ کمان‌هایی را نشان می‌دهد که در رابطهٔ $|\cos\alpha|-\sin\alpha<۰$ صدق می‌کنند؟

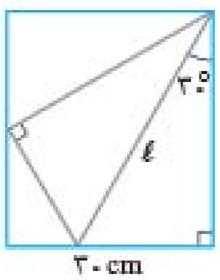
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶. یک برگ کاغذ مستطیل‌شکل به عرض ۳۰ سانتی‌متر را مطابق شکل مقابل تا کرده‌ایم، به‌طوری که یکی از گوشه‌ها بر ضلع مقابل منطبق شده باشد. طول خط تای کاغذ (ℓ) کدام است؟



۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

۷. برد تابع $۲^{|۲\cos x+۱|}$ کدام است؟

۱) $[۱,۸]$ ۲) $[۲,۸]$ ۳) $[۰,۸]$ ۴) $[۱,۲]$

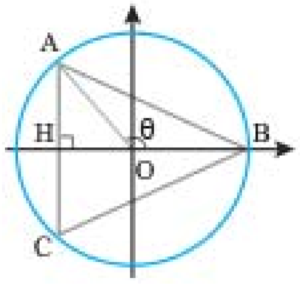
۸. اگر $\tan x\cdot\sin x<۰$ و $\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ x}+\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\tan x+\cot x$ باشد، x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی واقع شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹. مساحت جانبی مخروطی به شعاع ۱ برابر ۳π است. زاویهٔ مرکزی قطاعی که از گستردهٔ این شکل به دست می‌آید، چند رادیان است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۱۰. در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\sin\theta=\frac{۱}{۳}$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۹}$ ۲) $\frac{۳+\sqrt{۲}}{۹}$ ۳) $\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۲}}{۳}$

آزمون شمارهٔ ۵۲

۱. گزینه ۱

ایده: می‌دانیم $(f\times g)'(-1)$ همان $f'(-1)g(-1)+g'(-1)f(-1)$ است؛ بنابراین کافی است $f\times g$ را محاسبه کنیم؛ سپس از آن مشتق بگیریم و در آخر عدد -1 را به جای xها جای‌گذاری کنیم.

$$(f\times g)(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+\sqrt{x}})^8\times(x\sqrt{x}-\sqrt{x^3+\sqrt{x}})^8$$
$$=(x^3-x^3-\sqrt{x})^8=x^4\Rightarrow (f\times g)'(x)=4x^3\Rightarrow (f\times g)'(-1)=4(-1)^3=-4$$

(مشتق حاصل‌ضرب)

۲. گزینه ۱

نکته سمی: مشتق عامل صفرشونده: اگر تابع f به‌صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت باشد و بخواهیم f' را در نقطه‌ای حساب کنیم که آن نقطه باعث صفرشدن یکی از عبارات شود، کافی است فقط از آن عبارت مشتق بگیریم و بقیهٔ عبارات را دست‌نخورده در کنار این مشتق ضرب کنیم. در انتها آن نقطه را جای‌گذاری می‌کنیم. اگر تابع ناپیوسته بود، حد سایر عبارات را در آن نقطه می‌گیریم.

چون $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (حاصل حد یک عدد است) و حد مخرج صفر است؛ بنابراین حد صورت نیز صفر است ($\lim_{x\to 0}f(x)=0$) و چون f پیوسته است، پس: $f(0)=0$

در $x=0$، $f(x)$ عامل صفرشوندهٔ $y=f(x)\sqrt{\log_2(x^2+x+4)}$ است؛ پس طبق نکتهٔ بالا کافی است فقط از $f(x)$ مشتق بگیریم و $x=0$ را در بقیهٔ عبارت جای‌گذاری کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x+1}\Rightarrow f'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال $y'(0)$ را محاسبه می‌کنیم: $y'(0)=f'(0)\times\sqrt{\log_2(0+0+4)}$

$$\xrightarrow{f'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}} y'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\log_2 2^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{2}{2}=1$$

(عامل صفرشونده در مشتق)

۳. گزینه ۴

ایده: ابتدا تکلیف جزء صحیح، قدرمطلق و تابع نمایی را مشخص می‌کنیم سپس ضابطهٔ g را می‌یابیم و از آن مشتق می‌گیریم.

با توجه به این‌که x در چه محدوده‌ای قرار دارد ضابطهٔ $g(x)$ را می‌نویسیم:

۱) $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow g(x)=f((0/1)^x)$

تابع $(0/1)^x$ همواره مثبت است، پس داریم:

$$g(x)=f(\text{یک عبارت همواره مثبت})\xlongequal{\text{با توجه به ضابطهٔ f}}2\Rightarrow g'(x)=0$$

توجه: در تابع دوضابطه‌ای f وقتی ورودی مثبت باشد $f(x)=2$ است.

۲) $x=\frac{1}{2}\Rightarrow g(x)=|x^2-4|$

وقتی $x=\frac{1}{2}$ است عبارت داخل قدرمطلق یعنی x^2-4 منفی است، پس قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود.

$$g(x)=-x^2+4\Rightarrow g'(x)=-2x\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}g'(\tfrac{1}{2})=-1$$

۳) $x=\frac{3}{2}\Rightarrow g(x)=x+[|x|]$

در بازهٔ $(1, 2)$ حاصل $[|x|]$ برابر ۱ است؛ پس:

$$g(x)=x+1\Rightarrow g'(x)=1$$

نهایتاً:

$$g'(-\tfrac{1}{2})+g'(\tfrac{1}{2})+g'(\tfrac{3}{2})=0-1+1=0$$

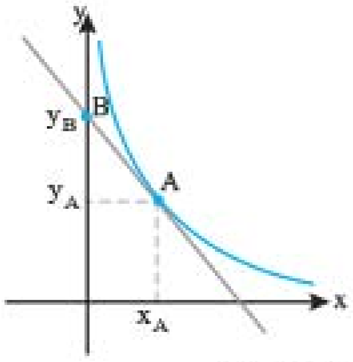
(مشتق توابع چندضابطه‌ای)

۴. گزینه ۳

نکته سمی: اگر خط $f(x)$ بر منحنی $g(x)$ در نقطه‌ای به طول α مماس باشد، داریم:

$$\begin{cases}f(\alpha)=g(\alpha)\\ f'(\alpha)=g'(\alpha)\end{cases}$$

$f(x)=\frac{1}{x^n}$ و $L=g(x)=ax+b$ است و داریم (b همان y_B است.):



دو نقطهٔ $A(x_A , y_A)$ و $B(0 , y_B)$ روی خط L هستند:

$$m_L=a=\frac{y_A-y_B}{x_A-0}\xrightarrow{y_B=4y_A}\frac{y_A-4y_A}{x_A}=\frac{-3y_A}{x_A} \quad ✱$$

طبق نکته داریم:

$$g'(x_A)=f'(x_A)\Rightarrow a=(\frac{1}{x_A^{\,n}})'\Rightarrow a=\frac{(0)(x^n)-(nx^{n-1})(1)}{x^{2n}}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1-(2n)}=-nx^{-n-1}=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$\xrightarrow{x=x_A}a=\frac{-n}{x_A^{\,n+1}}$$

با جای‌گذاری a از رابطهٔ ✱ داریم:

$$\frac{-3y_A}{x_A}=\frac{-n}{x_A^{\,n+1}}\Rightarrow\frac{-3y_A}{1}=\frac{-n}{x_A^{\,n}}\Rightarrow y_A\times x_A^{\,n}=\frac{n}{3}$$

از طرفی می‌دانیم: $f(x_A)=y_A=\frac{1}{x_A^{\,n}}\Rightarrow y_A\times x_A^{\,n}=1$

پس: $\frac{n}{3}=1\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n=3$

(شرط مماس شدن خط و منحنی)

۵. گزینه ۳

برای نوشتن معادلهٔ خط مماس، به شیب خط مماس و یک نقطه روی آن نیاز داریم: $x=\pi\Rightarrow f(\pi)=\frac{\sin\pi+2}{2\cos\pi+1}=-2$

پس $M(\pi, -2)$ روی خط است. برای پیداکردن شیب خط مماس، از f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{(\cos x)(2\cos x+1)-(-2\sin x)(\sin x+2)}{(2\cos x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\pi}f'(\pi)=\frac{(-1)(-2+1)-0}{(2(-1)+1)^2}=\frac{1}{1}=1$$

با داشتن نقطهٔ $M(\pi , -2)$ روی خط و شیب خط $m=1$، معادلهٔ خط را می‌نویسیم: $y+2=1(x-\pi)\Rightarrow y=x-\pi-2$

اکنون محل برخورد این خط با محورهای مختصات را پیدا می‌کنیم:

محل برخورد با محور yها: $x=0\Rightarrow y=-\pi-2\Rightarrow A\begin{vmatrix}0\\-\pi-2\end{vmatrix}$

محل برخورد با محور xها: $y=0\Rightarrow x=\pi+2\Rightarrow B\begin{vmatrix}\pi+2\\0\end{vmatrix}$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(-\pi-2)^2+(\pi+2)^2}=(\pi+2)\sqrt{2}$$

(معادلهٔ خط مماس - مشتق توابع مثلثاتی)

۶. گزینه ۴ ۲ ثانیه‌ای حلش کن

ایده: به کمک فرمول $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$y=\sin(3x+1^\circ)\cos(x+1^\circ)-\sin(x+1^\circ)\cos(3x+1^\circ)$$
$$=\sin((3x+1^\circ)-(x+1^\circ))=\sin 2x$$

در نتیجه:
$$y'=2\cos 2x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}}2\cos 2(\frac{\pi}{2})=-2$$

(مشتق توابع مثلثاتی - فرمول‌های مثلثاتی)

۷. گزینه ۳ روش اول:

ایده: هرگاه $f'g$ و $g'f$ را با هم یک‌جا دیدید، باید یاد مشتق ضرب یا تقسیم افتاد!

ابتدا $f\times g$ را تشکیل می‌دهیم:
$$(f\times g)(x)=(\sqrt{x^2+\cos x}+x)(\sqrt{x^2+\cos x}-x)$$
$$=x^2+\cos x-x^2=\cos x$$
$$(f\times g)'(x)=-\sin x\Rightarrow(f\times g)'(\pi)=-\sin\pi=0$$
$$f'(\pi)g(\pi)+g'(\pi)f(\pi)=0\Rightarrow f'(\pi)g(\pi)=-g'(\pi)f(\pi)$$
$$\Rightarrow\frac{f'(\pi)g(\pi)}{g'(\pi)f(\pi)}=-1$$

روش دوم: هرکدام را جداگانه محاسبه می‌کنیم که کمی طولانی است.

(مشتق حاصل‌ضرب)

۸. گزینه ۱ $\tan 2x$ در $x=\frac{\pi}{2}$ عامل صفرشونده است؛ پس کافی است فقط از آن مشتق بگیریم:
$$f(x)=\tan 2x(\sin x\cdot\cos\frac{x}{2})$$
$$f'(x)=2(1+\tan^2 2x)\times(\sin x\cdot\cos\frac{x}{2})$$
$$f'(\frac{\pi}{2})=2(1+\tan^2\pi)\times(\sin\frac{\pi}{2})(\cos\frac{\pi}{4})=2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

(مشتق عامل صفرشونده - مشتق توابع مثلثاتی)

۹. گزینه ۴ به کمک اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$ عبارت را ساده می‌کنیم:
$$f(x)=\underbrace{\tan ax-\cot ax}_{-2\cot 2ax}+2\tan 2ax\Rightarrow-2(\cot 2ax-\tan 2ax)$$
$$=-2\times2\cot 4ax\Rightarrow f(x)=-4\cot 4ax$$

حال از تابع f مشتق می‌گیریم:
$$f'(x)=-4(-4a(1+\cot^2 4ax))\Rightarrow f'(\frac{\pi}{24a})=16a(1+\cot^2 4a\times\frac{\pi}{24a})$$
$$=16a(1+\cot^2\frac{\pi}{6})=16a(1+(\sqrt{3})^2)=16a(4)=64a$$

(مشتق توابع مثلثاتی - فرمول‌های مثلثاتی)

۱۰. گزینه ۳

نکتهٔ سمی:

۱ اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه: $([x])'=$ وجود ندارد.

۲ اگر $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه: $([x])'=0$

چون $x\notin\mathbb{Z}$: پس مشتق $[x]$ برابر صفر است. از مشتق حاصل‌ضرب داریم:
$$f'(x)=0\times\cos^2x+(2\cos x)(-\sin x)([x])\Rightarrow f'(x)=-[x]\sin 2x$$

(مشتق توابع جزءصحیح)

آزمون شمارهٔ ۵۳

۱. گزینه ۱ به کمک رابطهٔ مشتق تابع مرکب؛ یعنی $(fog)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$، مشتق تابع $f(\sin x)$ را محاسبه می‌کنیم:
$$(f(\sin x))'(x)=\cos x\times f'(\sin x)=\tan 2x\Rightarrow f'(\sin x)=\frac{\tan 2x}{\cos x}$$

از فرمول‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:
$$f'(\sin x)=\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\cos x}=\frac{2\sin x\cdot\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}\cdot\cos 2x}=\frac{2\sin x}{1-2\sin^2x}$$
$$\Rightarrow f'(\sin x)=\frac{2\sin x}{1-2\sin^2x}\xrightarrow{\sin x=t}f'(t)=\frac{2t}{1-2t^2}$$

حال مشتق $f(\cos x)$ را محاسبه می‌کنیم:
$$(f(\cos x))'(x)=-\sin x\times f'(\cos x)=(-\sin x)\times\frac{2\cos x}{1-2\cos^2x}$$
$$=\frac{-\sin 2x}{-\cos 2x}=\tan 2x$$

(مشتق تابع مرکب - مشتق توابع مثلثاتی)

۲. گزینه ۲ مشتق y را می‌گیریم:
$$y'=\frac{(1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}})f'(x+\sqrt{1-x^2})(x-1)-(1)f(x+\sqrt{1-x^2})}{(x-1)^2}$$
$$\xrightarrow{x=0}y'(0)=-f'(1)-f(1)$$

$f'(1)$ شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۱ است؛ پس به جای محاسبهٔ مستقیم آن می‌توانیم شیب خط را به کمک نقاط $A(1,2)$ و $B(2,0)$ پیدا کنیم:
$$m_{AB}=\frac{0-2}{2-1}=-2\Rightarrow f'(1)=-2$$

همچنین با توجه به نمودار، $f(1)=2$ است.
$$y'(0)=-(-2)-(2)=2-2=0$$

(مشتق تابع مرکب - مشتق رادیکالی)

۳. گزینه ۱ به کمک تعریف مشتق، مشتق چپ $y=fog$ را حساب می‌کنیم:
$$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{(fog)(x)-(fog)(\sqrt{5})}{x-\sqrt{5}}\overset{g(\sqrt{5})=\frac{1}{2}}{=\!=}\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{f(g(x))-f(\frac{1}{2})}{x-\sqrt{5}}$$
$$=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{[2\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}]^2+|\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}|-([2\times\frac{1}{2}]^2+|\frac{1}{2}|)}{x-\sqrt{5}}$$

وقتی $x\to(\sqrt{5})^-$، داریم:
$$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}[2\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}]^2=[2\times\frac{1}{2^-}]^2=[2\times(\frac{1}{2})^+]^2=1$$

پس:
$$=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{\cancel{1}^2+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\cancel{1}-\frac{1}{2}}{x-\sqrt{5}}=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{\frac{2-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{5}}$$
$$=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{2-\sqrt{x^2-1}}{2(\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{5})}\times\frac{2+\sqrt{x^2-1}}{2+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{4-x^2+1}{(4)(x-\sqrt{5})(4)}=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{16(x-\sqrt{5})}$$
$$=\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}\frac{-(x+\sqrt{5})}{16}=\frac{-2\sqrt{5}}{16}=\frac{-\sqrt{5}}{8}$$

تله: توجه داشته باشید:
$$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-}[2\times\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}]^2=[2\times\frac{1}{2^-}]=[1^+]=1$$

همچنین:
$$|\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}_{\text{مثبت است}}|=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(مشتق تابع مرکب - مشتق چپ و راست)

◂ **برای نمونه:** اگر نقطهٔ $P(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، داریم:

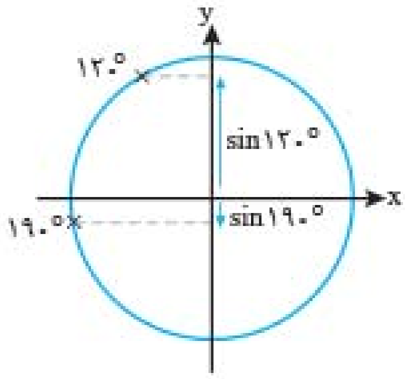
$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$$

مقایسهٔ مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ها در ربع‌های دایرهٔ مثلثاتی

در دایرهٔ مثلثاتی همواره داریم:

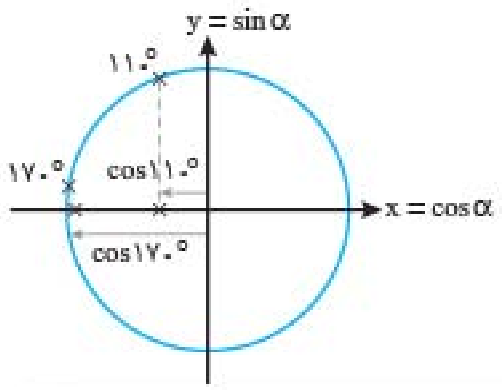
$$\begin{cases}-1\le\sin\alpha\le 1\\ -1\le\cos\alpha\le 1\end{cases}$$

برای مقایسهٔ دو مقدار مختلف $\sin\alpha$، آن‌ها را روی محور $\sin\alpha$ها تصویر می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم:



$\Rightarrow \sin 120^\circ > \sin 190^\circ$

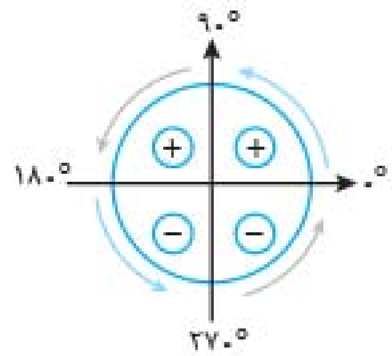
برای مقایسهٔ $\cos\alpha$ها نیز آن‌ها را روی محور $\cos\alpha$ها تصویر می‌کنیم:

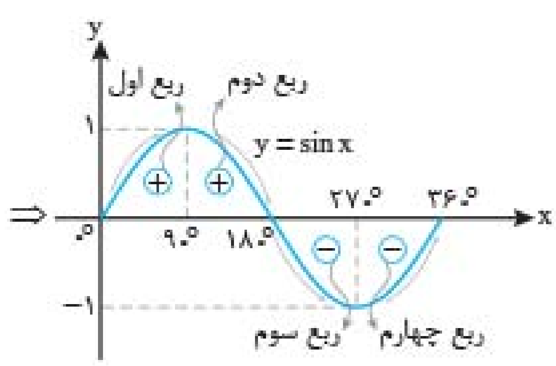


$\Rightarrow \cos 170^\circ < \cos 110^\circ$

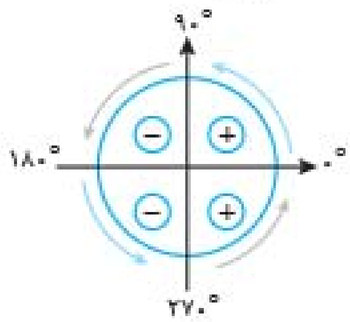
مقایسهٔ روند دایرهٔ مثلثاتی و نمودار سینوس و کسینوس

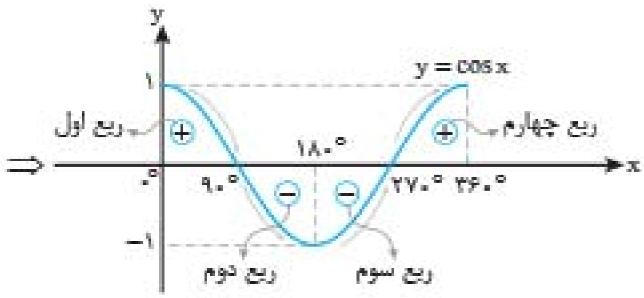
به دایرهٔ مثلثاتی زیر توجه کنید. ابتدا α از صفر درجه شروع می‌شود تا به $^\circ$۹۰ برسد، $\sin\alpha$ نیز از صفر شروع می‌شود تا به یک برسد؛ سپس α از $^\circ$۹۰ حرکت کرده و به $^\circ$۱۸۰ می‌رسد. $\sin\alpha$ از یک شروع به کم‌شدن می‌کند تا به ۰ برسد؛ سپس α از $^\circ$۱۸۰ به سمت $^\circ$۲۷۰ می‌رود، $\sin\alpha$ از ۰ به سمت ۱− حرکت می‌کند و در آخر نیز α از $^\circ$۲۷۰ به $^\circ$۳۶۰ می‌رسد. $\sin\alpha$ نیز از ۱− به سمت صفر برمی‌گردد.





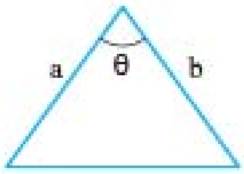
به‌طور مشابه برای $\cos\alpha$، داریم:





۲ کاربرد مثلثات

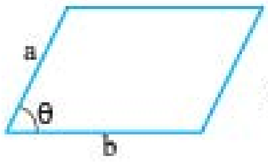
مساحت مثلث



$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\theta$$

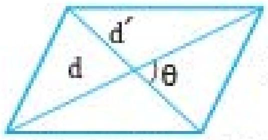
مساحت متوازی‌الاضلاع

۱ به کمک دو ضلع و زاویهٔ بین اضلاع:



$$S=ab\sin\theta$$

۲ به کمک دو قطر و زاویهٔ بین قطرها:



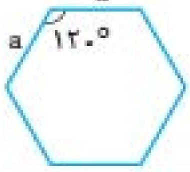
$$S=\frac{1}{2}d\times d'\times\sin\theta$$

◂ **برای نمونه:** اگر زاویهٔ بین دو قطر در یک متوازی‌الاضلاع با قطرهای ۳ و ۴ واحد، $^\circ$۱۲۰ باشد، مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}(3)(4)\sin 120^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

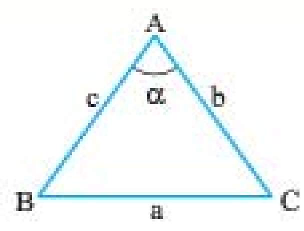
نکته: چون زوایای مکمل، سینوس‌های برابر دارند؛ پس می توانیم از هر دو زاویهٔ حاده یا منفرجه بین دو قطر استفاده کنیم.

مساحت شش‌ضلعی منتظم



$$S=6\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها

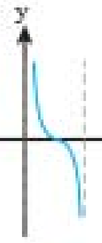


قانون سینوس‌ها: $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$

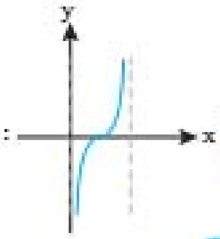
قانون کسینوس‌ها: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

برای رسم نمودار تابع $y=a\cot(bx+c)+d$ توجه داشته باشید:

۱ دورهٔ تناوب فاصلهٔ بین هر دو خط‌چین متوالی است.



۲ : اگر در یک دورهٔ تناوب، نزولی باشد، $ab>0$.

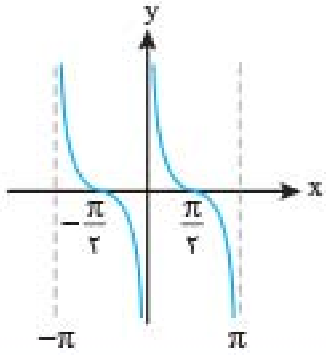


۳ : اگر در یک دورهٔ تناوب، صعودی باشد، $ab<0$.

مثال: نمودار تابع $y=\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}$ را رسم کنید.

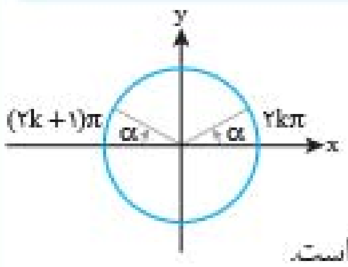
پاسخ با توجه به این‌که $y=\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}=2\cot x$، نمودار تابع شبیه $\cot x$ است.

$f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow$



۷ معادلهٔ مثلثاتی

معادلهٔ سینوسی



$\sin x=\sin\alpha$

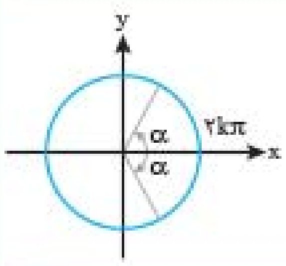
مجموعه جواب $\Rightarrow \begin{cases}x_1=2k\pi+\alpha\\x_2=(2k+1)\pi-\alpha\end{cases}$

تله: α زاویه‌ای در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ است.

◄ **برای نمونه:**

$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$

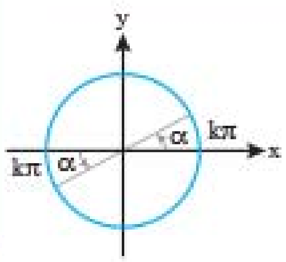
معادلهٔ کسینوسی



$\cos x=\cos\alpha$

مجموعه جواب $\Rightarrow x=2k\pi\pm\alpha$

معادلهٔ تانژانتی

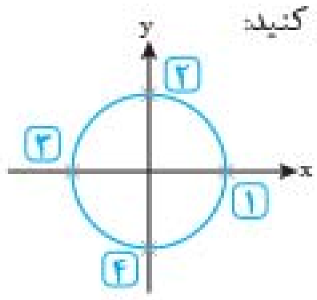


$\tan x=\tan\alpha$

مجموعه جواب $\Rightarrow x=k\pi+\alpha$

برای به دست آوردن جواب‌های معادله در بازه‌ای خاص به k اعداد صحیح $\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$ را می‌دهیم و جواب‌ها را پیدا می‌کنیم.

نکته سمی: به دایرهٔ مثلثاتی مقابل توجه کنید:



۱ $2k\pi$: «مضارب زوجی از π»

۲ $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$

۳ $(2k+1)\pi$: «مضارب فردی از π»

۴ $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ یا $(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$

۱ و ۳ $k\pi$: «هر دو با هم مضربی از π هستند.»

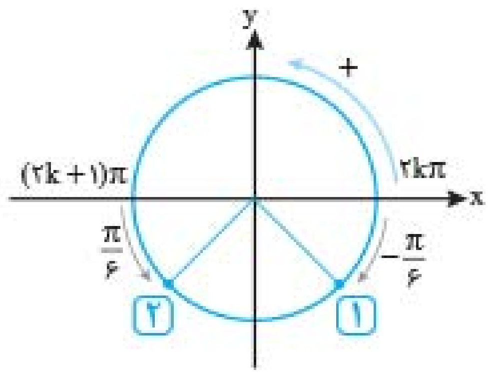
۲ و ۴ $k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

۱، ۲، ۳ و ۴ $\frac{k\pi}{2}$: «هر چهار تا با هم مضربی از $\frac{\pi}{2}$ هستند.»

با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی فوق و ضرایب داده‌شده، هر معادلهٔ مثلثاتی را که به ما بدهند، می‌توانیم برای جواب‌های کلی آن فرمولی مشخص کنیم.

◄ **برای نمونه:** برای حل معادلهٔ $\sin x=-\frac{1}{2}$، ابتدا می‌بینیم $\sin x$ در کجاها منفی است و کدام زاویهٔ حاده است که سینوس آن $\frac{1}{2}$ می‌شود.

$\sin x$ در ناحیه‌های سوم و چهارم، منفی و $\alpha=\frac{\pi}{6}$ است.

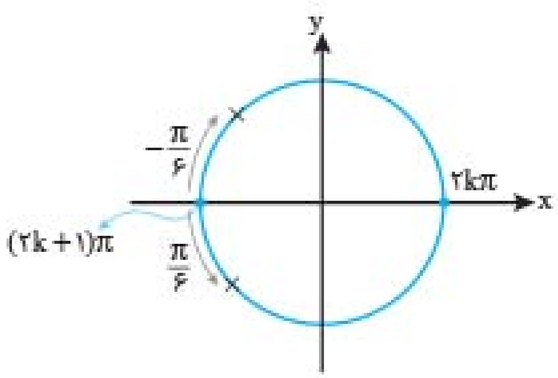


پس فرمول آن را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

حتی اگر این‌گونه بنویسیم $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ باز هم به نقطهٔ ۱ می‌رسیم.

◄ **برای نمونه:** برای حل معادلهٔ $\cos x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ نیز داریم ($\cos x$ در ربع‌های دوم و سوم منفی است.):



$$x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

حتی می‌توانیم از $2k\pi$ بلند شویم و بنویسیم:

$$\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\\x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\end{cases}$$